מטלת מנחה 17

## שאלה 1

### סעיף א

יהי ישר ויהיו נקודות לא קוויות שאינן על .

נתון שקיימת נקודה כך שמתקיים ,

ונתון שלא קיימת אף נקודה כך שמתקיים .

טענה: קיימת נקודה כלשהי כך שמתקיים .

הוכחה:

לפי ההנחה קיימות נקודות לא קוויות וישר כך שקיימת נקודה המקיימת .

לכן מאקסיומת פאש עבור ו קיימת נקודה כלשהי, שנסמנה ב, כך שמתקיים ( או ).

כמו כן, לפי ההנחה עבור : לא

לכן (( או ) וגם לא )

ולכן .

### סעיף ב

יהי ותהיינה נקודות כך שמתקיים , ,

טענה: אינן קוויות

הוכחה: נניח בשלילה קוויות ונניח לה"כ כי מתקיים (בכל סדר אחר ההוכחה דומה)

מאקסיומת החילה השנייה עבור קיים ישר יחיד, שנסמנו ב, המקיים .

לפי ההנחה ולכן קוויות, כלומר .

כלומר: הישר חותך את הקטע בנקודה .

לכן מאקסיומת פאש עבור ו קיימת נקודה כלשהי כך שמתקיים ( או ).

נניח לה"כ

מאקסיומת החילה השנייה עבור ו קיים ישר יחיד, שנסמנו באות , המקיים .

לפי ההנחה קוויות.

לכן קוויות.

לכן לפי אקסיומת החילה השנייה עבור : .

לכן ( וגם )

אבל לפי אקסיומת הסדר השנייה עבור לא !

## שאלה 2

### סעיף א

טענה: קיימים : .

הפרכה: נניח בשלילה כי קיימים :

לכן

לכן

בסתירה ליחידות השארית במשפט החלוקה עם שארית!

### סעיף ב

טענה: לכל :

טענת עזר: לכל :

טבעי ולכן קיים יחיד: ( או )

אם אז ולכן

לכן ( או )

ולכן מטרנזיטיביות יחס החלוקה ללא שארית

טענת עזר: לכל :

טבעי ולכן קיימים , יחידים:

ניתן למצוא את שארית החלוקה של ב5 בעזרת :

ולכן שארית החלוקה היא

באופן דומה שארית החלוקה של היא ,

שארית החלוקה של היא ,

ושארית החלוקה של היא

לכן לכל ערך אפשרי של קיים גורם במכפלה ששארית החלוקה שלו תהיה 0.

עבור , למשל, יהיה זה .

לכן ( או או או או )

ולכן מטרנזיטיביות יחס החלוקה ללא שארית .

הוכחה: יהי .

מטענות העזר ( וגם )

2 ו-5 הם זרים ולכן .

### 

### סעיף ג

תהי ותהי הקבוצה הנוצרת מ ע"י כפל.

טענה:

הפרכה: נניח בשלילה כי

לכן קיימים , לא כולם 0:

נעביר אגפים ונקבל

ולכן מהמשפט היסודי של האריתמטיקה ( וגם )

כי אילו , ולכן !

בסתירה למשפט החלוקה עם שארית!

### סעיף ד

טענה: אם וגם לא אז

הפרכה: כאשר , : וגם !

## שאלה 3

תהי סדרה המוגדרת ע"י הכלל הבא:

ולכל :

### סעיף א

### סעיף ב

טענה: לכל :

בסיס: .

צעד האינדוקציה: נניח עבור ונוכיח עבור

מכלל ההתאמה:

ולכן

לכן מהנחת האינדוקציה

ולכן .

### סעיף ג

טענה: לכל :

הפרכה:

כאשר :

ולכן קיימים עבורם הצעד הראשון בהוכחה באינדוקציה אינו מתקיים,

מכאן נובע שקיום השוויון בסעיף ב אכן תלוי בערכים שבחרנו עבור .

## שאלה 4

### סעיף א

טענה: לכל :

טענת עזר: לכל :

הוכחה: יהי

לכן ממשפט החלוקה עם שארית קיים : ( או )

אם :

אם :

ולכן .

בסיס:

צעד האינדוקציה: נניח עבור ונוכיח עבור .

מהנחת האינדוקציה

מטענת העזר

ולכן , כלומר .

### סעיף ב

טענה: לכל :

טענת עזר: לכל : אם לא אז

הוכחה: יהי ונניח כי לא מתקיים

לכן קיים :

לכן

ולכן .

טענת עזר: לכל לכל : אם לא אז

הוכחה: יהי ונניח כי לא מתקיים

לכן קיים : ( או )

במקרה הראשון:

במקרה השני:

ולכן בכל מקרה .

הוכחה: יהי

לכן מתקיים (( או לא ) וגם ( או לא ))

לכן מטענות העזר: (( או ) וגם ( או ))

לכן מטרנזיטיביות יחס החלוקה ללא שארית ( וגם )

2 ו3 זרים ולכן .